**ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ  
ВЕЛИЧИН І ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН,  
ЯКІ ВХОДЯТЬ ДО СИСТЕМИ**

Сукупність випадкових величин  які розглядаються спільно, називається ***системою  випадкових величин***. Якщо  тобто розглядається система двох випадкових величин , то геометрично її можна тлумачити як випадкову точку з координатами  на площині  або як випадковий вектор, складові якого — випадкові величини  Аналогічно, якщо , то маємо випадкову точку або випадковий вектор у тривимірному просторі. У загальному випадку систему  випадкових величин можна інтерпретувати як випадкову точку або випадковий вектор у просторі  вимірів.

Розглядають системи дискретних випадкових величин, неперервних випадкових величин, а також системи, до яких входять як дискретні, так і неперервні випадкові величини. Закони розподілу систем випадкових величин задаються різними способами. Так, закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин можна задати таблицею:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |
|  |  |  | … |  |
| … | … | … | … | … |
|  |  |  | … |  |

У цій таблиці 

Функція розподілу  системи двох випадкових величин визначає ймовірність спільного настання двох подій:  Геометрично функцію розподілу можна інтерпретувати як імовірність потрапляння випадкової точки в нескінченний прямокутник із вершиною  обмежений згори і праворуч (рис. 3.1).



Рис. 3.1

Функція розподілу має такі властивості:

1. 
2.  — неспадна функція *х* і *y*;
3. 
4. 
5. 

Функції  визначають закони розподілу для випадкових величин які входять до системи.

За допомогою функції розподілу можна подати ймовірність потрапляння випадкової точки у прямокутник, сторони якого паралельні осям координат:



Якщо розглядається система неперервних випадкових вели-чин, то для неї визначається щільність розподілу  При цьому  має такі властивості:

1.  2) 

Імовірність потрапляння випадкової точки  у довільну область *D* подається формулою:



Функція розподілу системи двох випадкових величин виражається через щільність розподілу:

.

Коли відомий закон розподілу системи випадкових величин, то можна знайти закони розподілу для її складових. Якщо в таблиці задано закон розподілу системи  то ймовірності  визначаються за формулами:



Скориставшись властивостями функції розподілу системи неперервних величин, можна знайти щільності розподілу величин, які входять до цієї системи:



***Умовним законом розподілу випадкової величини***, яка належить системі, називається закон розподілу, знайдений за умови, що друга випадкова величина набула певного значення.

Умовні щільності розподілу визначаються за формулами:



Для умовних законів розподілу розглядають числові характеристики — умовне математичне сподівання і умовну дисперсію, які обчислюються за формулами:





Формули, які виражають умовні математичні сподівання, називаються ***рівняннями регресії першого роду***.

Випадкові величини, які входять до системи, незалежні, якщо умовні закони розподілу для них збігаються з безумовними. Якщо щільність розподілу системи величин подається як добуток функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної, то величини, які входять до системи, незалежні.

**Приклад 1**. Система випадкових величин рівномірно розподілена в даній області *D* (рис. 3.2). Знайти    й умовну ймовірність 



***Розв’язання.*** Для визначення щільності розподілу даної системи випадкових величин скористаємося її властивістю: , а також тим, що в області  функція  Тоді   Оскільки даний подвійний інтеграл чисельно дорівнює площі області, обчислимо його як площу трапеції: 

Тоді



Знайдемо щільність розподілу  За формулою   Якщо значення  недодатні, то щільність розподілу системи дорівнює нулю, а отже, щільність  Якщо , то область обмежена лініями *y* = 0 i *y* = 2. Маємо,  Коли  змінюється на проміжку  обмеження області  за *y* такі: знизу *y* = 0, угорі *y* = 5 – *x.* Звідси  Нарешті, якщо   (згідно зі значенням ). Запишемо щільність розподілу для *Х*:



Знайдемо умовну щільність розподілу, скориставшись формулою 



Умовна щільність має два відмінні від нуля аналітичні вирази, кожний з яких має певне умовне математичне сподівання та дисперсію.

Якщо  то ,

а якщо  то 



Для знаходження умовної дисперсії обчислимо 

Якщо  то

 ,

а якщо  то  



Для обчислення умовної ймовірності потрібно зінтегрувати умовну щільність на відповідному проміжку:



Якщо , то значення  обмежені нерівністю  Тоді при *х* = 3, 5 верхня межа для значення  Підставляючи у вираз для умовної щільності значення *х* = 3,5, маємо: 